Kısıtsız Çok Değişkenli Optimizasyon

n değişkenli bir f fonksiyonunun **gradyantı (gradyant vektörü)** aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \ \frac{\partial f}{\partial x_n}\right]$$

∇f, f fonksiyonunun birinci kısmi türevlerini göstermek üzere

$$\nabla f(x_0) = 0$$

eşitliğini sağlayan x_0 noktalarına kritik nokta veya durağan nokta adı verilir. Bunlardan maksimum ya da minimum olan noktalara ise uç nokta (extrem nokta) denir.

Buradaki f fonksiyonunun, ikinci kısmi türevlerinden oluşan ve simetrik olan matrise **Hessian matrisi** adı verilir ve H ile aşağıdaki biçimde gösterilir.

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & , & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & , & \cdots & , & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & , & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & , & \cdots & , & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & , & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & , & \cdots & , & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$$

Örnek : $f = f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + 2x_1x_2 + x_3^4$ fonksiyonunun gradyant vektörünü ve Hessian matrisini bulunuz. Daha sonra $\nabla f(1,1,-1)$ ve $H(1,1,-1)$ ifadelerini elde ediniz.

Çözüm:

$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right] = [\, 3x_1^2 + 2x_2 \ , \ 2x_1 \ , \ 4x_3^3 \,]$$

$$\nabla f(1,1,-1) = (5, 2, -4)$$

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & , & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & , & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & , & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & , & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & , & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & , & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x_1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12x_3^2 \end{bmatrix}$$

$$H(1,1,-1) = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

olur.

Teorem: x_0 kritik (veya durağan) noktasının, $f(x)$ fonksiyonunun bir uç noktası olması için yeterli şart; bu noktadaki Hessian matrisi,

i) pozitif tanımlı olduğunda x_0 noktası yerel minimum noktadır.

ii) negatif tanımlı olduğunda x_0 noktası yerel maksimum noktadır.

iii) negatif yada pozitif tanımlı değilse x_0 noktası eyer(semer, dönüm) noktasıdır.

NOT1: Hessian matrisinin asal minörlerinin değerlerinin hepsi pozitif ise, H matrisi pozitif tanımlıdır.

Asal minörlerin değerlerinin işaretleri (-,+,-.+,…) şeklinde değişiyorsa H matrisi negatif tanımlıdır. (k. Asal minörün değeri $(-1)^k$ ile aynı işarete sahipse matris negatif tanımlıdır, $k = 1,2, \ldots, n$).

Örnek : $f = f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_2x_3 - 2x_1x_3 + 4x_1 + 20$ fonksiyonunun ekstremum noktalarını araştırınız?

Çözüm:

$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ \frac{\partial f}{\partial x_3}\right] = [\ 2x_1 - 2x_3 + 4\ , \quad -2x_2 - x_3\ , \qquad 2x_3 - x_2 - 2x_1\ ]$$

$\nabla f = 0 \ ise$

$$2x_1 - 2x_3 + 4 = 0$$

$$-2x_2 - x_3 = 0$$

$$2x_3 - x_2 - 2x_1 = 0$$

ortak çözümünden, $x_0 = (x_{10}\ , \ x_{20}\ , \ x_{30}) = (-10\ , \ 4\ , \ -8)$ bulunur. Bu nokta, kritik noktadır.

Bu noktadaki Hessian matrisi aşağıdaki gibidir:

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Birinci esas minör: $|2| = 2$ (pozitif)

İkinci esas minör : $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4$ (negatif)

Üçüncü esas minör : $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2$ (negatif)

NOT1'de verilen bilgilere uymadığı için Hessian matrisi ne negatif tanımlı nede pozitif tanımlıdır. O halde $x_0 = (x_{10}\ , \ x_{20}\ , \ x_{30}) = (-10\ , \ 4\ , \ -8)$ noktası, bir dönüm noktasıdır.

Örnek: $f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 + x_1x_2 + x_3$ fonksiyonunun optimal noktalarını bulunuz.

Çözüm:

$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right] = [-2x_1 + x_2 \quad , \quad -4x_2 + x_1 \quad , \quad -2x_3 + 1\ ]$$

$\nabla f = 0\ ise$

$$-2x_1 + x_2 = 0$$

$$-4x_2 + x_1 = 0$$

$$-2x_3 + 1 = 0$$

ortak çözümünden, $x_0 = (x_{10}, x_{20}, x_{30}) = (0, 0, 1/2)$ bulunur. Bu nokta, kritik noktadır.

Bu noktadaki Hessian matrisi aşağıdaki gibidir:

$$H = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Birinci esas minör: $|-2| = -2$ (negatif)

İkinci esas minör : $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 7$ (pozitif)

Üçüncü esas minör : $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -14$ (negatif)

NOT1'de verilen bilgilere göre Hessian matrisi negatif tanımlıdır. O halde $x_0 = (x_{10}, x_{20}, x_{30}) = (0, 0, 1/2)$ noktası yerel maksimum noktadır.